

**Řešení optimalizačních úloh
pomocí metody hraničních prvků
Optimal Control Problems and BEM**

Zadání diplomové práce

Student:

Bc. Robert Skopal

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

**Řešení optimalizačních úloh pomocí metody hraničních prvků
Optimal Control Problems and BEM**

Zásady pro vypracování:

V diplomové práci se student zaměří na numerické řešení optimalizační úlohy. Příslušná stavová úloha bude řešena pomocí metody hraničních prvků. Práci lze rozdělit do těchto částí:

1. Prostory funkcí. Potenciály a jejich vlastnosti.
2. Formulace stavové úlohy pomocí hraničních integrálních rovnic.
3. Popis optimalizační úlohy.
3. Diskretizace a numerické řešení.
4. Grafická vizualizace získaného řešení.

Seznam doporučené odborné literatury:

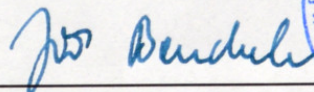
Dle pokynů vedoucího práce.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

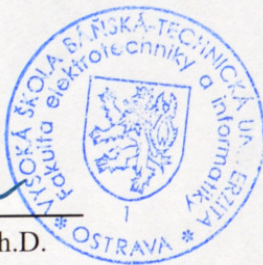
Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2013

Datum odevzdání: 07.05.2014



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7.5.2014


.....

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi Ph.D za ochotu a trpělivost při vedení této diplomové práce a dále doc. Ing. Daliboru Lukášovi Ph.D, za rady a pomoc v implementační části.

Abstrakt

Tato práce se zabývá optimálním řízením pro Dirichletovu okrajovou úlohu ve 2D bez omezení. Úloha spočívá v hledání minima cenového funkcionálu a je přeformulována na variační rovnici na hranici s využitím hraničních integrálních operátorů pro Poissonovu a bi-Laplaceovu rovnici.

Klíčová slova: Optimální řízení, Dirichletova úloha, metoda hraničních prvků, variační rovnice, Poissonova rovnice, bi-Laplaceova rovnice

Abstract

In this work the Dirichlet boundary optimal control problem without constrain's in 2D is presented. The problem is based on finding the minimum of the cost functional. This problem is lately reformulated as variational equation on domain boundary using the boundary integral operator's for Poisson and bi-Laplace equation.

Keywords: Optimal control problem, Dirichlet boundary value problem, boundary element method, variational equality, Poisson equation, bi-Laplace equation

Seznam použitých zkratk a symbolů

\mathbb{R}	– Množina všech reálných čísel
\mathbb{R}^+	– Množina všech kladných reálných čísel
\mathbb{R}^n	– n -rozměrný euklidovský prostor
\mathbb{N}	– Množina všech přirozených čísel
\mathbf{o}	– Nulový sloupcový vektor v \mathbb{R}^n
(x_n)	– Posloupnost prvků x_n , kde $n \in \mathbb{N}$
Ω	– Oblast Ω
$\partial\Omega$	– Hranice oblasti Ω
$\overline{\Omega}$	– Uzávěr oblasti Ω
$\text{diam}(\Omega)$	– Diametr oblasti Ω
$U(x, r)$	– Okolí bodu x s poloměrem r
∇	– Gradient funkce
Δ	– Laplaceův operátor
Δ^2	– bi-Laplaceův operátor
$\dim(X)$	– Dimenze prostoru X
$\ \cdot\ _X$	– Norma na prostoru X
$X \hookrightarrow Y$	– Kompaktní vnoření X do Y
$X \subset\supset Y$	– Spojité vnoření X do Y
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	– Skalární součin na prostoru X
$\langle F, v \rangle$	– Hodnota funkcionálu F v bodě v
$\text{Lin}\{x_i\}$	– Lineární obal prvků x_i
$\text{Ker}(F)$	– Jádro F
X^*	– Duální prostor k prostoru X
γ_0	– Operátor Dirichletovy stopy
γ_1	– Operátor Neumannovy stopy

Obsah

1	Úvod	2
2	Motivace	3
3	Prostory funkcí	5
3.1	Prostory funkcí na hranici	6
3.2	Normálová derivace v $H^1(\Omega)$	7
4	Hraniční integrální operátory	11
4.1	Poissonova rovnice	11
4.2	Bi-Laplaceova rovnice	13
5	Optimální řízení	15
5.1	1D ilustrace	15
5.2	Úloha optimálního řízení pro Dirichletovu úlohu ve 2D	21
5.3	Vlastnosti funkcionálu J_α	30
6	Diskretizace a numerická realizace	33
7	Numerické experimenty	39
8	Závěr	44
9	Reference	45

1 Úvod

Tato práce se zabývá optimálním řízením pro Dirichletovu okrajovou úlohu bez omezení, řešenou pomocí hraničních integrálních operátorů pro Poissonovu a bi-Laplaceovu rovnici.

Optimální řízení představuje důležitou součást teorie parciálních diferenciálních rovnic. Cílem je hledání okrajových podmínek k příslušným rovnicím tak, aby byly splněné dané optimalizační kritéria. Úloha se sestává z tzv. řídicích proměnných, tedy právě okrajových podmínek a stavových proměnných, které pak představuje řešení daných rovnic v závislosti na řídicí proměnné. Jádrem úloh optimálního řízení je minimalizace cenového funkcionálu, sestávajícího se jak z řídicích tak stavových proměnných. Problematika optimálního řízení má velké uplatnění v mnoha praktických úlohách.

Vzhledem k tomu, že naši neznámou bude při řešení problému optimálního řízení představovat funkce na hranici, je pro nás přirozenou volbou využití metody hraničních prvků a příslušných hraničních operátorů. Jinou, a také často využívanou možností, by bylo využití metody konečných prvků, pro kterou je však nutné diskretizovat celou oblast, na které je úloha předepsána. Díky využití hraničních integrálních operátorů si však vystačíme pouze s diskretizací hranice.

Jako první se v kapitole 2 podíváme na motivační úlohu z oblasti šíření tepla. Poté si v kapitole 3 představíme nejdůležitější prostory funkcí jak na oblasti Ω , tak na hranici $\partial\Omega$. Dále se pak v kapitole 4 budeme zabývat hraničními integrálními operátory pro Poissonovu a bi-Laplaceovu rovnici, které pro nás budou později, jak si ukážeme v kapitole 5.2, nezbytné pro minimalizaci zmíněného cenového funkcionálu ve 2D. Právě díky těmto znalostem budeme totiž schopni minimalizaci převést pouze na variační rovnici na hranici. Celou tuto problematiku si pro lepší ilustraci předvedeme také v 1D, a to konkrétně v kapitole 5.1. V kapitole 6 se budeme zabývat diskretizací našeho problému a na závěr si v kapitole 7 předvedeme vybrané numerické experimenty.

2 Motivace

Uvažujme ustálený stav vedení tepla v tenké desce. Tuto desku si popíšme jako oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - viz. obrázek 1, kde n značí jednotkový vektor vnější normály a $\partial\Omega$ hranici oblasti. Uvažujme funkci

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

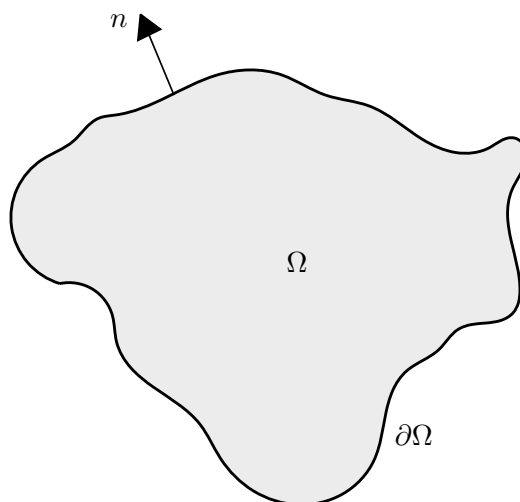
popisující teplotu uvnitř oblasti Ω . Rozložení tepla pak popisuje Poissonova rovnice

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ pro } x \in \Omega,$$

kde funkce

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

je funkce popisující případné vnitřní zdroje tepla uvnitř oblasti.



Obrázek 1: Oblast Ω

K Poissonově rovnici uvnitř oblasti Ω ještě přidejme Dirichletovu okrajovou podmínku na hranici

$$u(x) = g(x) \text{ pro } x \in \partial\Omega,$$

popisující teplotu desky na hranici. Díky známé funkci g bychom tak v tuto chvíli mohli přistoupit k řešení Poissonovy rovnice, např. některou z dobře známých numerických metod a získali bychom tak stacionární rozložení tepla v dané oblasti. V této práci nás

však bude zajímat postup opačný. Naším cílem bude naopak najít okrajovou podmínku (tedy funkci g) a to konkrétně tak, aby byla hodnota funkcionálu

$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle$$

minimální.

Podívejme se na využití této problematiky vzhledem k naší úloze rozložení tepla. Volme $\alpha = 0$ a funkci $\bar{u} \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ (viz. kapitola 3) a podívejme se na daný funkcionál. Není těžké si rozmyslet, že v tomto případě dostaneme jako minimum funkci g , pro kterou pak bude řešení dané Poissonovy rovnice s touto okrajovou podmínkou odpovídat přímo zadané funkci \bar{u} . Jinými slovy, v tomto triviálním případě si můžeme představit fyzikálně jistě rozumnou situaci, kdy chceme v dané desce dosáhnout předem požadovaného „rozumného“ (připomeňme, že $\bar{u} \in H_{\Delta}^1(\Omega)$) rozložení tepla a zajímá nás, jak tohoto rozložení uvnitř dosáhnout skrze teplotu na hranici dané desky.

Díky regularizačnímu členu

$$\frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

nám však takováto úloha umožní řešit také daleko obecnější případy. Budeme moci volit $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ a přesto bude stále zajištěna existence daného minima (viz. kapitola 5).

3 Prostory funkcí

V první kapitole si uvedeme nejdůležitější prostory funkcí, které pro nás budou později nezbytné v celé této práci. Představíme si Sobolevův prostor $H^1(\Omega)$ a ukážeme si, jak pro funkce z tohoto prostoru chápat hodnoty na hranici a normálové derivace. Pro ty si poté zavedeme Sobolevovy prostory na hranici $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ a $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Než si tyto prostory představíme domluvme se, že symbolem $L^2(\Omega)$ budeme rozumět příslušný Lebesgueův prostor a veškeré integrály v této práci pak chápeme jako lebesgueovské. Pro detailnější vysvětlení těchto pojmů lze doporučit např. [3].

Nyní se již podívejme na Sobolevův prostor $H^1(\Omega)$.

Definice 3.1 *Uvažujme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí. Symbolem*

$$H^1(\Omega)$$

pak rozumíme Sobolevův prostor prvního řádu, definovaný jako zúplnění

$$(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}),$$

kde pro všechna $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ definujeme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{H^1(\Omega)}^2},$$

kde

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx.$$

Lze navíc ukázat, že

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pro } i = 1, 2 \right\},$$

kde však derivace je třeba chápat ve smyslu distribucí. Vidíme tedy, že prostor $H^1(\Omega)$ je tvořen funkcemi z $L^2(\Omega)$. O těchto funkcích však víme, že ve skutečnosti tvoří třídy funkcí lišících se na množině „míry 0“ (viz. např. [3]), kterou však představuje také hranice oblasti na níž je funkce definována. Problematiku hodnot funkcí z $H^1(\Omega)$ na hranici a také jejich normálových derivací si objasníme v následujících dvou podkapitolách.

3.1 Prostory funkcí na hranici

Vzhledem k tomu, že velká část problematiky probírané v této práci se bude odehrávat na hranici dané oblasti, je třeba zavést speciální prostory funkcí právě na hranici.

Uvažujme Lebesgueův prostor $L^2(\partial\Omega)$ s normou

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} := \sqrt{\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 ds_x}.$$

Pro práci s funkcemi z $H^1(\Omega)$ pro nás bude klíčový pojem stop funkcí.

Věta 3.1 *Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ohraničenou oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje právě jedno spojité lineární zobrazení*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

takové, že

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Takové $\gamma_0 u \in L^2(\partial\Omega)$ pak nazýváme stopou funkce $u \in H^1(\Omega)$.

Dá se ukázat, že v $L^2(\partial\Omega)$ jsou i funkce, které nejsou stopou žádné funkce z $H^1(\Omega)$. Operátor stop tedy není „zobrazení na“, neboli surjekce.

Definujme nyní prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ jako obor hodnot stop z $H^1(\Omega)$, tedy

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \gamma_0(H^1(\Omega)).$$

Vzhledem k tomu, že stopa je lineární zobrazení je zřejmé, že $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tvoří vektorový podprostor $L^2(\partial\Omega)$. Definujme na něm normu

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{\substack{\gamma_0 u = v \\ u \in H^1(\Omega)}} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Lze ukázat, že $\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ existuje $u_0 \in H^1(\Omega)$ takové, že $\gamma_0 u_0 = v$ a že

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \|u_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

Otázkou je, jak zjistit, zda funkce $v \in L^2(\partial\Omega)$ patří do $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Dá se ukázat, že prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je tvořen funkcemi $v \in L^2(\partial\Omega)$, pro které platí, že

$$|v|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 := \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{(v(x) - v(y))^2}{\|x - y\|^2} ds_x ds_y < \infty.$$

V tomto případě značí $|v|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2$ tzv. seminormu. Pomocí této seminormy pak na prostoru $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ můžeme definovat ekvivalentní, tzv. Sobolev-Slobodeckého normu

$$|||v|||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \sqrt{\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + |v|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2}.$$

Symbolem $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ značme prostor duální k $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tzn.

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right)^*$$

a pro všechna $w \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ definujeme normu

$$\|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \frac{|\langle w, v \rangle|}{|||v|||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}.$$

3.2 Normálová derivace v $H^1(\Omega)$

Díky větě 3.1 tedy máme k dispozici nástroj, který nám umožní pracovat s funkcemi z $H^1(\Omega)$ na hranici. Zbývá pouze ukázat, jak chápat normálové derivace.

Jako první si představme tzv. operátor harmonického rozšíření.

Věta 3.2 *Přiřaďme každé funkci $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ funkci $\mathcal{H}u \in H^1(\Omega)$, která je (právě jedním) slabým řešením Dirichletovy úlohy*

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{H}u &= 0 & \text{v } \Omega, \\ \mathcal{H}u &= u & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pak takto definovaný operátor (tzv. harmonické rozšíření)

$$\mathcal{H} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

je lineární, spojitý a

$$\forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \quad \gamma_0(\mathcal{H}u) = u.$$

Pozorování 3.1 Uvažujme funkci $u \in C^2(\overline{\Omega})$ jako klasické řešení úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Přenásobme nyní první rovnici funkcí $v \in C(\overline{\Omega})$ a tento součin integrujme přes celou oblast Ω , tedy

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in C(\overline{\Omega})$$

a s využitím Greenovy věty (viz. např. [3]) dostáváme

$$\int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1)$$

Nyní si však všimněme dále klíčového faktu, a to toho, že oba integrály na pravé straně rovnosti (1) mají smysl, i s členy ∇u , ∇v a Δu ve kterých $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ a $v \in L^2(\Omega)$.

Na základě inspirace z pozorování 3.1 nyní definujme pro funkce $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$, kde

$$H_{\Delta}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : -\Delta v \in L^2(\Omega) \text{ ve smyslu distribucí}\},$$

zobrazení

$$\frac{du}{dn} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

předpisem

$$\left\langle \frac{du}{dn}, v \right\rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx. \quad (2)$$

Lze ukázat, že takto definované zobrazení je spojitě, lineární a proto

$$\frac{du}{dn} \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^* = H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Nyní jsme tedy získali nápad, jak zavést normálovou derivaci pro funkce $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ jako funkcionál (2).

Poznámka 3.1 Poznamenejme, že pro funkce $u \in C^1(\Omega)$ je

$$\frac{du}{dn} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i.$$

Pro funkce $u \in H^2(\Omega)$ (pro které $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$) bychom tak normálovou derivaci mohli zavést obdobně jako

$$\left\langle \frac{du}{dn}, v \right\rangle := \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) n_i \right) v \, ds_x.$$

Uvažujme nyní funkci $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ ve tvaru $u = u_1 + u_2$, kde $u_1, u_2 \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ a u je slabým řešením úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{v } \Omega, \\ u &= g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zavedme si Steklov-Poincarého operátor

$$S : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

který funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ přiřadí hodnotu $\frac{du_1}{dn}$, kde $u_1 \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ je slabým řešením úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= 0 & \text{v } \Omega, \\ u_1 &= g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dále zavedme tzv. Newtonův operátor

$$N : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

který funkci $f \in L^2(\Omega)$ přiřadí hodnotu $\frac{du_2}{dn}$, kde $u_2 \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ je slabým řešením úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u_2 &= f & \text{v } \Omega, \\ u_2 &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Odtud můžeme normálovou derivaci funkce u zapsat jako

$$\gamma_1 u(x) = \frac{du}{dn}(x) = (S \underbrace{\gamma_0 u}_g)(x) + (Nf)(x).$$

Nyní si můžeme zavést Greenovu větu pro funkce $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$, která je klíčová pro odvození reprezentační formule v kapitole 4.1.

Věta 3.3 Uvažujme funkci $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$, potom

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \left\langle \frac{du}{dn}, \gamma_0 v \right\rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Představme si podrobněji zmíněný Steklov-Poincarého operátor.

Věta 3.4 *Steklov-Poincarého opertátor*

$$S : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

je lineární, omezený, symetrický a semi-eliptický na $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, splňující

$$(\exists \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^+)(\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_{/KerS}) : \langle Sv, v \rangle \geq \tilde{\alpha} \|v\|^2,$$

kde symbol $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_{/KerS}$ značí prostor funkcí $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ortogonálních na jádro S (tvořeného konstantami). Navíc pak

$$\langle Su, v \rangle = \langle Sv, u \rangle \quad \forall u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

a

$$\langle Sv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Důkazy vlastností Steklov-Poincarého operátoru z věty 3.4 lze najít např. v [10].

Samotnému napočítání normálové derivace pomocí operátorů S a N se budeme věnovat dále v kapitole 4.1.

Poznámka 3.1 V literatuře se pro operátor γ_0 resp. γ_1 často setkáváme s označením *Dirichletova* resp. *Neumannova stopa*. Této terminologie budeme dále využívat i v této práci.

4 Hraniční integrální operátory

V této kapitole si představíme operátory potřebné k zavedení hraniční integrální formule pro Poissonovu rovnici v rovině a pro tzv. bi-Laplaceovu rovnici. Tyto operátory pro nás budou později nezbytné pro problematiku v kapitole 5. Dále odvodíme předpis pro již známý Steklov-Poincarého operátor a Newtonův operátor, díky kterým pak budeme schopni počítat normálové derivace funkcí z $H^1_\Delta(\Omega)$.

4.1 Poissonova rovnice

Věta 4.1 *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a funkce $u \in H^1(\Omega)$ řešení Poissonovy rovnice*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{v } \Omega.$$

Potom

$$\forall \tilde{x} \in \Omega : u(\tilde{x}) = \int_{\Omega} f(\tilde{x}) U^*(\tilde{x}, y) dy + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y) U^*(\tilde{x}, y) ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y) \gamma_{1,y} U^*(\tilde{x}, y) ds_y, \quad (3)$$

kde funkce

$$U^*(\tilde{x}, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|\tilde{x} - y\|$$

značí tzv. fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v rovině.

Aplikováním operátorů Dirichletovy a Neumannovy stopy na (3) dostáváme na $\partial\Omega$ systém hraničních integrálních rovnic

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_0 f \\ N_1 f \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Podívejme se nyní na jednotlivé operátory vyskytující se v soustavě (4). Pro všechna $x \in \partial\Omega$ máme

- potenciál jednoduché vrstvy

$$V : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (Vt)(x) := \int_{\partial\Omega} t(y) U^*(x, y) ds_y,$$

- potenciál dvojvrstvy

$$K : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (Ku)(x) := \int_{\partial\Omega} u(y)\gamma_{1,y}U^*(x,y)ds_y,$$

- adjungovaný potenciál dvojvrstvy

$$K' : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (K't)(x) := \int_{\partial\Omega} t(y)\gamma_{1,x}U^*(x,y)ds_y,$$

- hypersingulární operátor

$$D : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (Du)(x) := -\gamma_{1,x} \int_{\partial\Omega} u(y)\gamma_{1,y}U^*(x,y)ds_y,$$

- Newtonovy objemové potenciály

$$N_0 : L^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (N_0f)(x) := \int_{\Omega} f(x)U^*(x,y)dy,$$

$$N_1 : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (N_1f)(x) := \int_{\Omega} f(x)\gamma_{1,x}U^*(x,y)dy.$$

Všechny výše zmíněné operátory jsou lineární a spojité. V je navíc symetrický a pro $\text{diam}(\Omega) < 1$ pak i prostý. Odvození, důkazy a další vlastnosti jednotlivých operátorů již byly mnohokrát sepsány a lze je najít např. v [1],[9], [10], [11]. Pro nás bude dále klíčová prostost potenciálu jednoduché vrstvy, jelikož z první rovnice soustavy (4) dostáváme předpis pro Neumannovu stopu

$$\gamma_1 u(x) = V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) \gamma_0 u(x) - V^{-1}(N_0f)(x)$$

a dosazením tohoto výsledku do druhé rovnice pak ekvivalentní formulaci

$$\gamma_1 u(x) = \left[\left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) + D \right] \gamma_0 u(x) + \left[N_1 - \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} N_0 \right] f(x).$$

Získáváme tak předpis pro Steklov-Poincarého operátor

$$S := V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) = \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K \right) + D$$

a pro Newtonův operátor

$$-N := -V^{-1}N_0 = N_1 - \left(\frac{1}{2}I + K' \right) V^{-1}N_0.$$

Lze ukázat, že druhé vyjádření Steklov-Poincarého operátoru vede po diskretizaci na symetrickou matici.

4.2 Bi-Laplaceova rovnice

Podobně jako v kapitole 4.1 si stručně představíme reprezentační formuli a operátory pro bi-Laplaceovu rovnici v rovině, které později využijeme v kapitole 5.2.

Věta 4.2 *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a funkce $u \in H^2(\Omega)$ řešení bi-Laplaceovy rovnice*

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad v \quad \Omega.$$

Potom

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \Omega : \quad u(\tilde{x}) = & \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn_y}(y) \Delta_y V^*(\tilde{x}, y) ds_y - \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dn_y} \Delta_y V^*(\tilde{x}, y) u(y) ds_y - \\ & - \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dn_y} V^*(\tilde{x}, y) \Delta u(y) ds_y + \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dn_y} \Delta u(y) V^*(\tilde{x}, y) ds_y, \end{aligned} \quad (5)$$

kde funkce

$$V^*(\tilde{x}, y) = -\frac{1}{8\pi} \|x - y\|^2 (\ln \|x - y\| - 1)$$

značí fundamentální řešení bi-Laplaceovy rovnice v rovině (viz. např. [4], [8]).

Uvažujme bi-Laplaceovu rovnici

$$\Delta^2 u = 0 \quad v \quad \Omega$$

jako systém Laplaceovy a Poissonovy rovnice

$$\Delta w = 0, \quad \Delta u = w, \quad v \quad \Omega.$$

Stejně jako v případě Poissonovy rovnice aplikací Dirichletovy a Neumannovy stopy na reprezentační formuli a s využitím skutečnosti, že

$$\Delta_y V^*(x, y) = U^*(x, y), \quad \text{pro } x \neq y \quad (6)$$

získáváme soustavu hraničních integrálních rovnic

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \\ \gamma_0 w \\ \gamma_1 w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V & -K_1 & V_1 \\ D & \frac{1}{2}I + K' & D_1 & K'_1 \\ \frac{1}{2}I - K & & D & V \\ \frac{1}{2}I + K' & & D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \\ \gamma_0 w \\ \gamma_1 w \end{pmatrix}$$

kde oproti operátorům známým z kapitoly 4.1 navíc definujeme pro $x \in \partial\Omega$ následující:

- potenciál jednoduché vrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici

$$V_1 : H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \quad V_1(\tau)(x) := \int_{\partial\Omega} V^*(x, y) \tau(y) ds_y$$

- potenciál dvojvrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici

$$K_1 : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \quad K_1(w)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dn_y} V^*(x, y) w(y) ds_y$$

- adjungovaný potenciál dvojvrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici

$$K'_1 : H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \quad K'_1(\tau)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dn_x} V^*(x, y) \tau(y) ds_y$$

- hypersingulární operátor pro bi-Laplaceovu rovnici

$$D_1 : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \quad D_1(w)(x) := -\gamma_{1,x} \int_{\partial\Omega} w(y) \gamma_{1,y} V^*(x, y) ds_y.$$

Pro studium dalších vlastností a některé užitečné vztahy mezi operátory pro Poissonovu a bi-Laplaceovu rovnici a především také definice prostorů $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ a $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ lze využít např. [4],[5],[8]. Pro naše potřeby jsou však v tuto chvíli zmíněné poznatky dostačující.

5 Optimální řízení

V této kapitole se budeme zabývat problémem optimálního řízení pro Dirichletovu okrajovou úlohu. Naším cílem bude minimalizace cenového funkcionálu, pro kterou využijeme znalosti z kapitoly 4. Tento problém poté převedeme na variační rovnici na hranici oblasti. Zajímat nás bude následující úloha.

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ohraničená oblast s lipschitzovskou hranicí. Dále mějme dané číslo $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ pro $d = 1$ (resp. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pro $d = 2$) a funkci $\bar{u} \in L^2(\Omega)$. Naším cílem bude najít funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pro niž nabývá funkcionál

$$J_\alpha(g) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle,$$

kde u_g je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u_g(x) &= 0 & \text{pro } x \in \Omega, \\ u_g(x) &= g(x) & \text{pro } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

na $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ svého minima.

Zabývejme se úlohou nejprve v 1D, kde víme, jak „vypadají“ řešení rovnice

$$\Delta u = u'' = 0.$$

5.1 1D ilustrace

Uvažujme následující úlohu.

Mějme danou oblast $\Omega := (0, 1)$, funkci $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Naším úkolem bude najít funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ takovou, že pro funkcionál

$$J_\alpha(g) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} u_g''(x) &= 0 & \text{pro } x \in (0, 1), \\ u_g(x) = g(x) &= \begin{cases} g_0 & \text{pro } x = 0, \\ g_1 & \text{pro } x = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

platí

$$J_\alpha(g) = \min_{h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} J_\alpha(h).$$

Je třeba si však nejdříve ujasnit, jak v tomto případě chápat člen $\langle Sg, g \rangle$. Oproti 2D lze v tomto případě snadno ukázat, že jediné funkce u_g , splňující rovnici $u_g''(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, jsou funkce lineární, tj. funkce ve tvaru $u_g(x) = ax + b$. Díky tomuto faktu tak budeme v 1D případě do úlohy lépe vidět, protože pro

$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{pro } x = 0, \\ g_1 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

je

$$u_g(x) = ax + b, \quad \text{kde} \quad \begin{cases} a = g_1 - g_0 \\ b = g_0 \end{cases}.$$

Navíc, protože $H^1(\langle 0, 1 \rangle) \hookrightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$, je

$$(\gamma_0 u_g)(x) = u_g|_{\partial\Omega}(x) = \begin{cases} u_g(0) & \text{pro } x = 0, \\ u_g(1) & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Z kapitoly 3.2 víme, že Steklov-Poincarého operátor chápeme jako derivaci ve směru vnější normály, a tedy

$$Sg = \frac{d}{dn}(\mathcal{H}g) = \frac{d}{dn}(ax + b) = \begin{cases} a & \text{pro } x = 1, \\ -a & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Již tak máme vše potřebné k tomu, abychom mohli náš funkcionál v 1D zapsat jako

$$\begin{aligned} J_\alpha(g) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \left[g_1 \frac{du_g}{dn}(1) + g_0 \frac{du_g}{dn}(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (ax + b - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} [a(a + b) - ab]. \end{aligned}$$

Všimněme si dále, že jelikož \bar{u} a α známe, je minimalizace funkcionálu J_α ekvivalentní s minimalizací funkce dvou proměnných

$$F(a, b) := \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{3} + ab - 2Aa + b^2 - 2Bb + C + \alpha a^2 \right]$$

na \mathbb{R}^2 , kde pro $\bar{u} \in L^2(\langle 0, 1 \rangle)$ je

$$A = \int_0^1 x \bar{u}(x) dx, \quad B = \int_0^1 \bar{u}(x) dx, \quad C = \int_0^1 \bar{u}^2(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Minimalizací funkce F na \mathbb{R}^2 tak získáme koeficienty a, b lineární funkce u_g . Z této funkce již pouze dosazením krajních hodnot intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ získáme hledané hodnoty g_0 a g_1 , jenž představují řešení naší úlohy.

Nejdříve si však dokažme, že $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} F(a, b)$ existuje.

Důkaz. Jako první ukažme tzv. koercivitu funkce $F(a, b)$ (o které se budeme více bavit v kapitole 5.2). Budeme chtít, aby pro posloupnost (a_n, b_n) platila následující implikace

$$\|(a_n, b_n)\| \rightarrow \infty \Rightarrow F(a_n, b_n) \rightarrow \infty.$$

Uvažujme nejdříve $\alpha = 0$ a všimněme si, že zmíněná vlastnost stačí dokázat pouze pro funkci

$$\hat{F}(a, b) = \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$$

Doplňme nyní funkci $\hat{F}(a_n, b_n)$ na čtverec a dostaneme tak, že

$$\hat{F}(a_n, b_n) = \frac{1}{3}(a_n + \frac{3}{2}b_n)^2 + \frac{1}{4}b_n^2, \quad (7)$$

popř. ekvivalentní vyjádření

$$\hat{F}(a_n, b_n) = \frac{1}{12}a_n^2 + (b_n + \frac{1}{2}a_n)^2. \quad (8)$$

Uvažujme pro posloupnost (a_n, b_n) normu $\|(a_n, b_n)\| = |a_n| + |b_n|$ (připomeňme, že se nacházíme na prostoru konečné dimenze a tedy všechny normy jsou ekvivalentní) a je tedy zřejmé, že pro $|a_n| + |b_n| \rightarrow \infty$ pak z (7) a (8) plyne, že $\hat{F}(a_n, b_n) \rightarrow \infty$. Všimněme si, že koercivita je tímto splněna také pro původní funkci $F(a, b)$ a to i s volbou $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, jelikož $\alpha a^2 \geq 0$.

Díky koercivitě tak můžeme tvrdit, že

$$\exists r > 0 : \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} F(a, b) = \inf_{(a,b) \in \overline{U}(0,r)} F(a, b).$$

Dále díky zřejmé spojitosti funkce $F(a, b)$ pak z Weierstrassovy věty plyne existence minima na $\overline{U}(0, r)$ a z koercivity se tak jedná zároveň o minimum na celém \mathbb{R}^2 . ■

Předpokládejme, že existuje právě jedno minimum funkce F a označme jej jako bod $[a_{min}, b_{min}]$. Víme, že pro takový bod musí platit

$$\nabla F(a_{min}, b_{min}) = \begin{pmatrix} \frac{(1+3\alpha)a_{min}}{3} + \frac{b_{min}}{2} - A \\ \frac{a_{min}}{2} + b_{min} - B \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Odtud vidíme, že skutečně dostáváme pouze jediný stacionární bod minima funkce F

$$[a_{min}, b_{min}] = \left[\frac{12A - 6B}{12\alpha + 1}, \frac{12B\alpha + 4B - 6A}{12\alpha + 1} \right]. \quad (9)$$

Podívejme se nyní na některé vybrané numerické experimenty pro různě zadané funkce \bar{u} a $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 5.1

Volme nejprve $\bar{u}(x) = 1 \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$, a tedy

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1 \quad \text{a} \quad C = 1.$$

Minimum funkce $F(a, b)$ je tedy dle (9) v bodě $[a_{\min}, b_{\min}] = [0, 1]$ a odtud dostáváme, že

$$u(x) = ax + b = 1 \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{a} \quad g_0 = u(0) = 1, \quad g_1 = u(1) = 1.$$

Vidíme, že při zadání konstantní funkce \bar{u} odpovídá funkce u_g právě této funkci a nezáporný funkcionál J_α tak nabývá hodnoty 0 pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ■

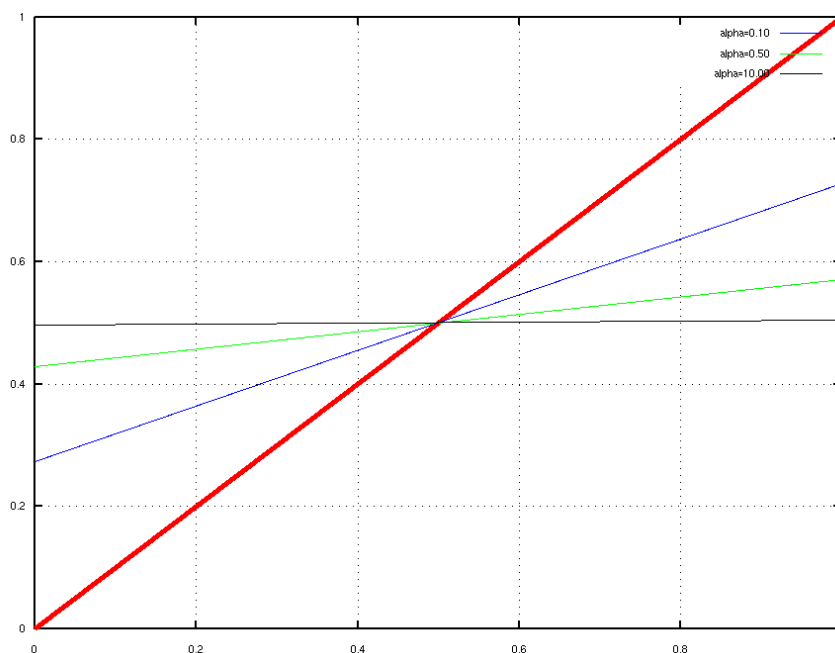
Příklad 5.2

Nyní uvažujme funkci \bar{u} tak, aby $\Delta \bar{u}(x) = 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Volme tedy např. $\bar{u}(x) = x \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$.

V tomto případě tedy

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad C = \frac{1}{3}.$$

Podívejme se, jak se bude řešení chovat pro různé hodnoty α . Na obrázku 2 vidíme silně červenou čarou vyznačenou funkci \bar{u} a v tomto případě vidíme, že pro rostoucí α se funkce u_g blíží konstantní funkci v hodnotě 0.5.



Obrázek 2: Řešení pro $\bar{u}(x) = x$

Tento výsledek není žádným překvapením, protože pro

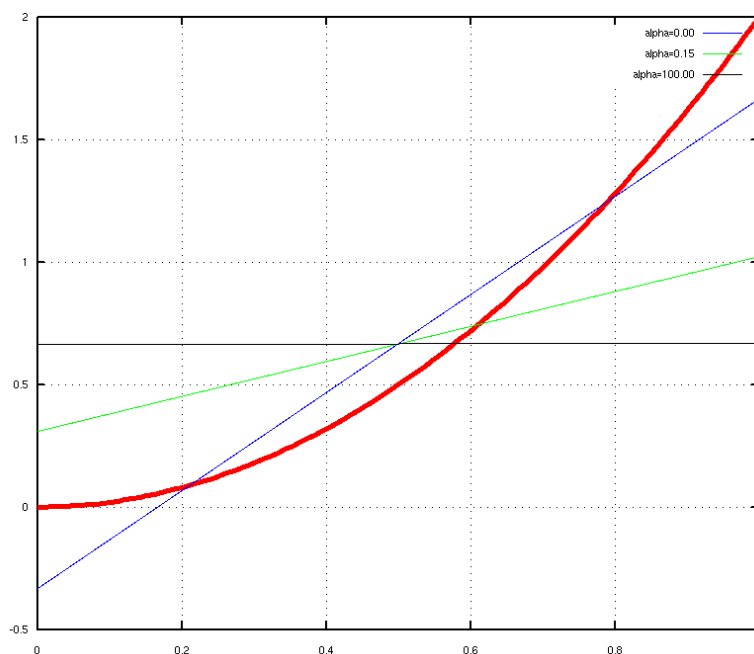
$$u_\alpha(x) = a_\alpha x + b_\alpha = \frac{4x}{12\alpha + 1} + \frac{6\alpha}{12\alpha + 1} \text{ je } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} u_\alpha(x) = \frac{1}{2}.$$

■

Příklad 5.3

V dalším příkladě uvažujme funkci \bar{u} tak, aby naopak $\Delta \bar{u}(x) \neq 0$ a opět $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Volme tedy např. $\bar{u}(x) = 2x^2 \ \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$. Tedy

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad \text{a} \quad C = \frac{4}{5}.$$



Obrázek 3: Řešení pro $\bar{u}(x) = 2x^2$

Na obrázku 3 vidíme, že pro $\alpha = 0$ je hledaná funkce $u = P\bar{u}$, kde $P : L^2(\Omega) \rightarrow M = \overline{M} = \text{Lin}\{1, x\} \subset L^2(\Omega)$, ortogonální projekce. Pro rostoucí α se pak blížíme konstantní funkci v hodnotě ≈ 0.66 . Toto opět odpovídá skutečnosti, že pro

$$u_\alpha(x) = a_\alpha x + b_\alpha = \frac{2x}{12\alpha + 1} + \frac{8\alpha + 1}{12\alpha + 1} \text{ je } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} u_\alpha(x) = \frac{2}{3}.$$

■

Příklad 5.4

V posledním příkladě volme funkci \bar{u} tak, aby nebyla spojitá, např.

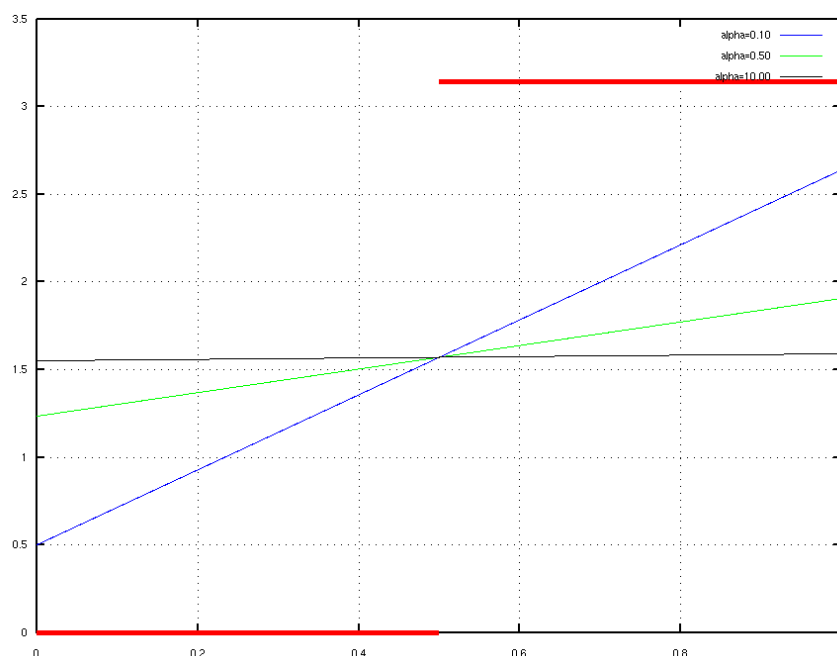
$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0, \frac{1}{2}), \\ \pi & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Odtud pak

$$A = \frac{3\pi}{8}, \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi^2}{2}$$

a proto pro

$$u_\alpha(x) = a_\alpha x + b_\alpha = \frac{3\pi x}{2(12\alpha + 1)} + \frac{6\pi\alpha - \pi/4}{12\alpha + 1} \quad \text{je} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} u_\alpha(x) = \frac{\pi}{2}.$$



Obrázek 4: Řešení pro nespojitě \bar{u}

Na obrázku 4 vidíme, že dle očekávání získáváme lineární funkce které nám se zvyšujícím se α „průměrují“ zadanou funkci \bar{u} .

■

5.2 Úloha optimálního řízení pro Dirichletovu úlohu ve 2D

Nyní se konečně na danou problematiku podívejme ve 2D. Budeme se zabývat následující úlohou.

Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ohraničená oblast s lispchitzovskou hranicí. Bud' $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a funkce $\bar{u} \in L^2(\Omega)$. Naším cílem bude najít funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ takovou, pro kterou je hodnota funkcionálu

$$J_\alpha : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle, \quad (10)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta u_g(x) &= 0 & \text{pro } x \in \Omega, \\ u_g(x) &= g(x) & \text{pro } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

minimální na $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Jako první dokažme, že minimum funkcionálu (10) skutečně existuje.

Důkaz. K důkazu nám poslouží následující definice a věta (viz. např. [6]). Důležitý pro nás bude pojem koercivity funkcionálu.

Definice 5.1 Bud' X normovaný lineární prostor. Funkcionál $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme koercivní, jestliže pro každou posloupnost x_n v X platí implikace

$$\|x_n\| \rightarrow \infty \implies Jx_n \rightarrow \infty.$$

Koercivita spolu se spojitostí a konvexitou zajistí existenci minima.

Věta 5.1 (O existenci minima) Bud' X reflexivní Banachův prostor a $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý, striktně konvexní funkcionál koercivní na X . Pak funkcionál J nabývá právě jednoho minima na X .

Jelikož $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je Hilbertův, a proto reflexivní Banachův prostor (viz. např. [2]), bude pro důkaz existence minima funkcionálu (10) třeba dokázat tři věci, a to

1. spojitost J_α ,
2. konvexita J_α ,

3. koercivita J_α .

Všechny tyto tři vlastnosti budeme postupně dokazovat vždy pro jednotlivé části J_1 a J_2 funkcionálu J , kde

$$J_\alpha(g) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx}_{J_1(g)} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle}_{J_2(g)}.$$

Domluvme se, že vzhledem k tomu, že konstanty $\frac{1}{2}$ a $\frac{\alpha}{2}$ nemají vliv ani na jednu z výše zmiňovaných vlastností, které je třeba dokázat, nebudeme je pro lepší přehlednost v důkazu psát.

ad1) Začneme se spojitostí. Naším cílem bude ukázat, že pro každou posloupnost (g_n) v $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ a každý prvek $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ platí

$$g_n \rightarrow g \implies J_\alpha(g_n) \rightarrow J_\alpha(g).$$

- Nejdříve se podívejme na funkcionál J_1 . Víme, že pokud $g_n \rightarrow g$ pak díky spojitě závislosti řešení na vstupních datech (viz. např. [3]) a spojitému vnoření $H^1(\Omega) \subset \supset L^2(\Omega)$ platí

$$u_{g_n} - \bar{u} \rightarrow u_g - \bar{u} \text{ v } L^2(\Omega).$$

Odtud, jelikož např. z [2] víme, že norma je spojitý lineární funkcionál, plyne, že

$$\|u_{g_n} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \|u_g - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

což však přesně odpovídá dokazované konvergenci

$$\underbrace{\int_{\Omega} (u_{g_n}(x) - \bar{u}(x))^2 dx}_{J_1(g_n)} \rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx}_{J_1(g)}.$$

- Nyní obdobně pro funkcionál J_2 chceme ukázat, že

$$g_n \rightarrow g \implies \left| \underbrace{\langle Sg_n, g_n \rangle}_{J_2(g_n)} - \underbrace{\langle Sg, g \rangle}_{J_2(g)} \right| \rightarrow 0.$$

Všimněme si, že

$$|J_2(g_n) - J_2(g)| = |\langle Sg_n - Sg, g_n \rangle + \langle Sg, g_n - g \rangle|,$$

a jelikož

$$|\langle Sg_n - Sg, g_n \rangle| + |\langle Sg, g_n - g \rangle| \leq \|S\| \|g_n - g\| \|g_n\| + \|Sg\| \|g_n - g\|,$$

kde $\|S\|, \|Sg\|$ jsou konstanty, posloupnost $\|g_n\|$ je omezená a $\|g_n - g\| \rightarrow 0$, tak

$$|J_2(g_n) - J_2(g)| \rightarrow 0.$$

Čímž je spojitost J_1 a J_2 - a tedy i celého funkcionálu J_α - dokázána.

ad2) Nyní dokažme konvexitu J_α . Mějme funkce $g, h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ a čísla $s, t \in \mathbb{R}^+$ taková, že $s + t = 1$. Naším cílem bude ukázat, že

$$J_\alpha(sg + th) \leq sJ_\alpha(g) + tJ_\alpha(h).$$

Opět si jako v případě spojitosti rozdělme náš funkcionál na funkcionály J_1 a J_2 a dokažme jejich konvexitu. Konvexita J_α pak plyne ze skutečnosti, že součet konvexních funkcionálů je opět funkcionál konvexní.

- Začneme členem J_1 , tedy

$$J_1(sg + th) = \int_{\Omega} (su_g + tu_h - \bar{u})^2 dx = \int_{\Omega} ((su_g + tu_h)^2 - 2(su_g + tu_h)\bar{u} + \bar{u}^2) dx.$$

Nyní využijme nezápornosti s, t, \bar{u}^2 a konvexity kvadratické funkce pro člen $(su_g + tu_h)^2$. Odtud můžeme psát odhad

$$\begin{aligned} J_1(sg + th) &< s \int_{\Omega} u_g^2 dx + t \int_{\Omega} u_h^2 dx - 2s \int_{\Omega} u_g \bar{u} dx - 2t \int_{\Omega} u_h \bar{u} dx + s \int_{\Omega} \bar{u}^2 dx + t \int_{\Omega} \bar{u}^2 dx \leq \\ &\leq s \int_{\Omega} (u_g - \bar{u})^2 dx + t \int_{\Omega} (u_h - \bar{u})^2 dx = sJ_1(g) + tJ_1(h), \end{aligned}$$

čímž máme dokázanou striktní konvexitu J_1 .

- Nyní s využitím vlastností Steklov-Poincarého operátoru z věty 3.4 dokažme totéž pro člen J_2 . Zřejmě

$$J_2(sg + th) = \langle S(sg + th), sg + th \rangle = s^2 \langle Sg, g \rangle + 2st \langle Sg, h \rangle + t^2 \langle Sh, h \rangle.$$

Zajímá nás tedy, jestli

$$s^2 \langle Sg, g \rangle + 2st \langle Sg, h \rangle + t^2 \langle Sh, h \rangle \stackrel{?}{\leq} s \langle Sg, g \rangle + t \langle Sh, h \rangle.$$

Převeďme vše na levou stranu a upravme dokazovanou nerovnost do tvaru

$$s \underbrace{(s-1)}_{-t} \langle Sg, g \rangle + 2st \langle Sg, h \rangle + t \underbrace{(t-1)}_{-s} \langle Sh, h \rangle \stackrel{?}{\leq} 0.$$

Jednoduchou úpravou tak dostáváme

$$\langle Sg, g \rangle - 2 \langle Sg, h \rangle + \langle Sh, h \rangle \stackrel{?}{\geq} 0.$$

Všimněme si nyní, že poslední řádek lze zapsat jako

$$\langle S(g - h), g - h \rangle \stackrel{?}{\geq} 0.$$

Z kapitoly 3.2 však víme, že

$$\forall (g - h) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \langle S(g - h), g - h \rangle \geq 0.$$

Tímto jsme dokázali i konvexitu funkcionálu J_2 a nyní již proto víme, že funkcionál J_α je skutečně konvexní. Navíc si všimněme, že jsme ve skutečnosti dokázali striktní konvexitu J_1 (a tedy celého J_α), potřebnou pro jednoznačnost minima.

ad3) Zbývá tak ukázat koercivitu. Uvažujme funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ve tvaru

$$g := \tilde{g} + c,$$

kde c představuje ortogonální projekci na jádro S . Jelikož $\dim(\text{Ker } S) = 1$, najdeme právě jeden nejbližší prvek, a to právě uvažované c (viz. např. [2]). K němu pak funkce \tilde{g} představuje ortogonální doplněk do $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Potřebujeme tedy pro posloupnost $g_n := \tilde{g}_n + c_n$ ukázat, že

$$\|g_n\| \rightarrow \infty \implies J(g_n) \rightarrow \infty.$$

Důkaz provedme sporem. Pro spor předpokládejme, že

$$\|g_n\| \rightarrow \infty \quad \wedge \quad J(g_n) \not\rightarrow \infty. \quad (11)$$

Z každé posloupnosti nezáporných, reálných čísel která nemá limitu ∞ , můžeme vybrat posloupnost omezenou. Takže

$$\exists \hat{c} \in \mathbb{R} : \quad \|g_{n_k}\| \rightarrow \infty \quad \wedge \quad 0 \leq J(g_{n_k}) = \underbrace{J_1(g_{n_k})}_{\geq 0} + \underbrace{J_2(g_{n_k})}_{\geq 0} \leq \hat{c}.$$

Obě posloupnosti $(J_1(g_{n_k}))$ a $(J_2(g_{n_k}))$ tak musí být omezené.

- Podívejme se nyní na funkcionál $J_2(g_{n_k})$. Z věty 3.4 vidíme, že

$$\begin{aligned} \langle Sg_{n_k}, g_{n_k} \rangle &= \langle S(\tilde{g}_{n_k} + c_{n_k}), \tilde{g}_{n_k} + c_{n_k} \rangle = \langle S\tilde{g}_{n_k}, \tilde{g}_{n_k} + c_{n_k} \rangle + \underbrace{\langle Sc_{n_k}, \tilde{g}_{n_k} + c_{n_k} \rangle}_{=0} = \\ &= \langle S\tilde{g}_{n_k}, \tilde{g}_{n_k} \rangle + \underbrace{\langle S\tilde{g}_{n_k}, c_{n_k} \rangle}_{=\langle Sc_{n_k}, \tilde{g}_{n_k} \rangle=0} = \langle S\tilde{g}_{n_k}, \tilde{g}_{n_k} \rangle \geq \tilde{\alpha} \|\tilde{g}_{n_k}\|^2. \end{aligned}$$

A tedy pro to, aby byla posloupnost $(J_2(g_{n_k}))$ omezená, musí být posloupnost (\tilde{g}_{n_k}) omezená.

- Nyní se podívejme na funkcionál $J_1(g_{n_k})$ a využijme právě dokázané omezenosti (\tilde{g}_{n_k}) . Zaveďme si následující značení:

$$J_1(g_{n_k}) = \int_{\Omega} (u_{g_{n_k}} - \bar{u})^2 dx = \int_{\Omega} (u_{\tilde{g}_{n_k}} + \underbrace{u_{c_{n_k}}}_{c_{n_k}} - \bar{u})^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega} (u_{\tilde{g}_{n_k}} + c_{n_k} - \bar{u})^2 dx = \underbrace{\int_{\Omega} c_{n_k}^2 dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} 2c_{n_k}(u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u}) dx}_{I_2} + \underbrace{\int_{\Omega} (u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u})^2 dx}_{I_3}.$$

Vidíme, že $I_1 = m_{\Omega} c_{n_k}^2$, kde m_{Ω} značí míru oblasti Ω a $\exists k \in \mathbb{R}$ takové, že $I_3 = \|u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k$ (viz. např. [3] - spojitá závislost řešení na vstupních datech). Zajímavější je však člen I_2 . Odhadněme si jej v absolutní hodnotě pomocí Hölderovy nerovnosti jako

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} 2c_{n_k}(u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u}) dx \right| \leq \\ & \leq 2 \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} c_{n_k}^2 dx}}_{c_{n_k} \sqrt{m_{\Omega}}} \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} (u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u})^2 dx}}_{\|u_{\tilde{g}_{n_k}} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}} \leq 2c_{n_k} \underbrace{\sqrt{m_{\Omega}} (\|u_{\tilde{g}_{n_k}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)})}_{\leq \|u_{\tilde{g}_{n_k}}\|_{H^1(\Omega)}} \\ & \leq \tilde{m} c_{n_k} \end{aligned}$$

kde $\tilde{m} \in \mathbb{R}^+$ a tedy

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leq m_{\Omega} c_{n_k}^2 - \tilde{m} c_{n_k} + k.$$

Aby tak byl funkcionál J_1 omezený, musela by být i posloupnost (c_{n_k}) omezená.

Tímto jsme však narazili na spor, jelikož v (11) jsme předpokládali, že

$$\|g_n\| = \|\tilde{g}_{n_k} + c_{n_k}\| \rightarrow \infty.$$

Jak vidíme, máme dokázané veškeré potřebné předpoklady pro existenci a jednoznačnost minima funkcionálu (10) dle věty 5.1. ■

Naším cílem bude dále ukázat, jak toto minimum nalézt. Jako první si zavedme pojem tzv. adjungovaného operátoru.

Definice 5.2 *Bud' X, Y Hilbertovy prostory a $T : X \rightarrow Y$ spojitý, lineární operátor. Operátorem adjungovaným k T pak rozumíme operátor $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ který každému $y^* \in Y^*$ přiřazuje $T^* y^* \in X^*$, definovaný předpisem*

$$\langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle \quad \forall x \in X.$$

Připomeňme si z kapitoly 3.1 operátor harmonického rozšíření

$$\mathcal{H} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

a složme ho se spojitým vnořením

$$H^1(\Omega) \subset \supset L^2(\Omega).$$

Získáme tak spojité lineární zobrazení

$$H : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

Funkcionál (10) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} J_\alpha(g) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Hg(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Hg - \bar{u}, Hg - \bar{u} \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Hg, Hg \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle Hg, \bar{u} \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle. \end{aligned}$$

Nyní uvažujme operátor H^* adjungovaný k H

$$H^* : (L^2(\Omega))^* \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Prostor $(L^2(\Omega))^*$ můžeme díky Rieszově větě ztotožnit s prostorem $L^2(\Omega)$ (viz. např. [2]), a tedy

$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \langle H^* Hg, g \rangle - \langle H^* \bar{u}, g \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle.$$

V tuto chvíli se již začneme zabývat hledáním samotného minima.

Pozorování 5.1 Zřejmě platí, že je-li

$$J_\alpha(g) = \min_{h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} J_\alpha(h)$$

a existuje-li $\langle J'_\alpha(g), v \rangle$ pro $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, je

$$\langle J'_\alpha(g), v \rangle = 0.$$

Potřebujeme tedy napočítat derivaci funkcionálu (10). Výjděme přímo z definice derivace funkcionálu (viz. např. [2]), že pro $g, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ platí

$$\begin{aligned}
\langle J'_\alpha(g), v \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\alpha(g + \lambda v) - J_\alpha(g)}{\lambda} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\langle H^* H(g + \lambda v), g + \lambda v \rangle - \langle H^* Hg, g \rangle}{\lambda} - \\
&\quad - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\langle H^* \bar{u}, g + \lambda v \rangle - \langle H^* \bar{u}, g \rangle}{\lambda} + \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\langle S(g + \lambda v), g + \lambda v \rangle - \langle Sg, g \rangle}{\lambda}
\end{aligned}$$

a odtud¹

$$\langle J'_\alpha(g), v \rangle = \frac{1}{2} [\langle H^* Hg, v \rangle + \langle H^* Hv, g \rangle] - \langle H^* \bar{u}, v \rangle + \frac{\alpha}{2} [\langle Sg, v \rangle + \langle Sv, g \rangle].$$

Nyní, díky již zmiňovaným vlastnostem Steklov-Poincarého operátoru a faktu, že

$$\langle H^* Hv, g \rangle = \langle Hv, Hg \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Hg, Hv \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle H^* Hg, v \rangle,$$

dostáváme, že pro každé $g, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je

$$\langle J'_\alpha(g), v \rangle = \langle H^* Hg, v \rangle - \langle H^* \bar{u}, v \rangle + \langle \alpha Sg, v \rangle = \langle \alpha Sg + H^*(u_g - \bar{u}), v \rangle,$$

kde $u = Hg$.

Odvodili jsme tak variační rovnici

$$\langle \alpha Sg + H^*(u_g - \bar{u}), v \rangle = 0 \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (12)$$

pro výpočet stacionárního bodu g funkcionálu J_α . Nyní si ukažme, jak budeme počítat člen $H^*(u_g - \bar{u})$.

Tvrzení 5.1 *Bud' $u_g, \bar{u} \in L^2(\Omega)$. Pak pro $H^*(u_g - \bar{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ platí, že*

$$H^*(u_g - \bar{u}) = -\gamma_1 p,$$

kde $p \in H^1_\Delta(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ je slabým řešením úlohy

$$\begin{aligned}
-\Delta p(x) &= u_g(x) - \bar{u}(x) & \text{pro } x \in \Omega, \\
p(x) &= 0 & \text{pro } x \in \partial\Omega.
\end{aligned} \quad (13)$$

¹Všimněme si, že člen $\frac{1}{2} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$ je konstantní, při derivování nám tedy odpadá.

Důkaz. Připomeňme si definici $\gamma_1 p$ a harmonického rozšíření $\mathcal{H}v$. Potom

$$\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \langle \gamma_1 p, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla p \nabla \mathcal{H}v - \int_{\Omega} (u_g - \bar{u}) \mathcal{H}v$$

a navíc

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla \mathcal{H}v \nabla \varphi = 0 \quad \text{a} \quad \gamma_0 \mathcal{H}v = 0.$$

Odtud při volbě testovací funkce $\varphi = p$ plyne, že

$$\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \langle \gamma_1 p, v \rangle = 0 - \int_{\Omega} (u_g - \bar{u}) \mathcal{H}v = - \langle u_g - \bar{u}, \mathcal{H}v \rangle_{L^2(\Omega)} = - \langle H^*(u_g - \bar{u}), v \rangle.$$

Čímž je důkaz tvrzení 5.1 hotov. ■

Variační rovnice (12) tak přechází do tvaru

$$\langle \alpha Sg - \gamma_1 p, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (14)$$

Na chvíli se teď zastavme a uvědomme si, že máme k dispozici vztah pro výpočet gradientu J . Pokud bychom v tuto chvíli přistoupili k hledání minima pomocí některé z gradientních metod, díky kterým by jsme se k hledanému minimu blížili formou iteračního procesu, museli by jsme v každé iteraci i pro funkci g_i spočítat příslušné u_{g_i} a dále řešit objemovou úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta p_i(x) &= u_{g_i}(x) - \bar{u}(x) & \text{pro } x \in \Omega, \\ p_i(x) &= 0 & \text{pro } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

což by bylo výpočetně velice náročné.

My se však budeme dále snažit o lepší postup, který nám umožní vyvarovat se náročnému řešení objemové úlohy (15) a rovnici (14) přeformulujeme pomocí hraničních integrálních operátorů.

Napišme si nyní dle věty 4.1 reprezentační formuli pro funkci p , definovanou jako řešení úlohy (13), a to

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \Omega : p(\tilde{x}) &= \int_{\Omega} (u(y) - \bar{u}(y)) U^*(\tilde{x}, y) dy + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 p(y) U^*(\tilde{x}, y) ds_y - \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 p(y) \gamma_{1,y} U^*(\tilde{x}, y) ds_y. \end{aligned}$$

Jako první si všimněme, že z (13) plyne

$$- \int_{\partial\Omega} \gamma_0 p(y) \gamma_{1,y} U^*(\tilde{x}, y) ds_y = 0.$$

Nyní s využitím vlastností jednotlivých hraničních operátorů (popsaných např. v [1]) provedeme limitní přechod

$$\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \partial\Omega$$

a dostaneme tak

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega : 0 = p(x) = & \int_{\Omega} u(y)U^*(x, y)dy - \\ & - \int_{\Omega} \bar{u}(y)U^*(x, y)dy + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 p(y)U^*(x, y)ds_y. \end{aligned} \quad (16)$$

Dále si z kapitoly 4.2 připomeňme klíčový vztah mezi fundamentálními řešeními pro Laplaceovu a bi-Laplaceovu rovnici a to konkrétně, že fundamentální řešení bi-Laplaceovy rovnice můžeme chápat jako řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta_y V^*(x, y) = U^*(x, y), \quad x \neq y.$$

S využitím věty 4.1 pak první objemový integrál z (16) můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \Omega : \int_{\Omega} U^*(\tilde{x}, y)u(y)dy &= \int_{\Omega} \Delta_y V^*(\tilde{x}, y)u(y)dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y)\gamma_{1,y} V^*(\tilde{x}, y)ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y)V^*(\tilde{x}, y)ds_y \end{aligned}$$

a vzhledem ke spojitosti funkce $V^*(\tilde{x}, y)$ opět provést limitní přechod

$$\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \partial\Omega$$

a získat tak pro daný objemový integrál předpis na hranici

$$\forall x \in \partial\Omega : \int_{\Omega} U^*(x, y)u(y)dy = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u(y)\gamma_{1,y} V^*(x, y)ds_y - \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u(y)V^*(x, y)ds_y. \quad (17)$$

Dejme nyní dohromady vztahy (16) a (17) a získáme tak hraniční integrální rovnici pro námi hledaný člen $\gamma_1 p$ variační rovnosti (14):

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega : - \underbrace{\int_{\partial\Omega} U^*(x, y)\gamma_1 p(y)ds_y}_{[V(\gamma_1 p)](x)} &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \gamma_{1,y} V^*(x, y)g(y)ds_y}_{[K_1(g)](x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \overbrace{\gamma_1 u(y)}^{Sg} V^*(x, y)ds_y}_{[V_1(Sg)](x)} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} U^*(x, y)\bar{u}(y)dy}_{[N_0(\bar{u})](x)} \end{aligned}$$

Nyní tedy konečně vzhledem k elipticitě operátoru V pro $\text{diam}(\Omega) < 1$ dostáváme finální podobu variační rovnosti (14), a to

$$\langle \alpha Sg - V^{-1} [V_1(Sg) - K_1(g)], v \rangle = \langle V^{-1} [N_0(\bar{u})], v \rangle \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (18)$$

Řešením (18) je tak hledané minimum $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ funkcionálu (10) představující řešení naší úlohy popsané na začátku této kapitoly.

5.3 Vlastnosti funkcionálu J_α

V této kapitole se budeme zabývat limitním „chováním“ funkcionálu J_α pro $\alpha \rightarrow 0$ (a to speciálně pro volbu \bar{u} tak, že $\Delta\bar{u} = 0$) a $\alpha \rightarrow \infty$. Navíc si ukážeme, jak najít horní odhad funkcionálu J_α . Tyto zmíněné vlastnosti poté budeme testovat numerickými experimenty v kapitole 7.

Pozorování 5.2 *Připomeňme si náš funkcionál*

$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle$$

a označme si

$$J(g_\alpha) := \min_{g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} J_\alpha(g),$$

kde $g_\alpha \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Uvažujme nyní funkci \bar{u} takovou, že $\Delta\bar{u} = 0$ ve smyslu distribucí (tedy $\bar{u} \in H_{\Delta}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$) a všimněme si, že jelikož

$$0 \leq J(g_\alpha) \leq J_\alpha(\gamma_0 \bar{u}) = \frac{\alpha}{2} \langle S\gamma_0 \bar{u}, \gamma_0 \bar{u} \rangle \rightarrow 0 \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0,$$

pak

$$u_g \rightarrow \bar{u} \quad \text{v } L^2(\Omega), \quad \text{pro } \alpha \rightarrow 0.$$

Pozorování 5.3 *Uvažujme číslo $\bar{c} \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$\int_{\Omega} (\bar{c} - \bar{u}(x))^2 dx = \min_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega} (c - \bar{u}(x))^2 dx.$$

Lze ukázat, že číslo \bar{c} můžeme najít pomocí Fourierovy řady (viz. např. [2]) jako

$$\bar{c} = \frac{1}{m_\Omega} \int_{\Omega} \bar{u},$$

kde m_Ω značí míru oblasti Ω .

Pak protože $g_{\bar{c}}(x) := \bar{c} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, je

$$\forall \alpha > 0 : J_{\alpha}(g) \leq J_{\alpha}(g_{\bar{c}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{c} - \bar{u}(x))^2 dx + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle Sg_{\bar{c}}, g_{\bar{c}} \rangle}_{=0} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{c} - \bar{u}(x))^2 dx \stackrel{\text{ozn.}}{=} \hat{J}.$$

Hodnota \hat{J} pak tedy představuje horní odhad funkcionálu J_{α} .

Tvrzení 5.2 Mějme posloupnost (α_n) a uvažujme konstantu \bar{c} z pozorování 5.3. Potom

$$\alpha_n \rightarrow \infty \Rightarrow g_{\alpha_n} \rightarrow \bar{c} \text{ v } H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Důkaz. Uvažujme náš funkcionál J_{α} a funkci $g_{\alpha} := \tilde{g}_{\alpha} + c_{\alpha}$ (kde c_{α} opět značí ortogonální projekci na $\text{Ker}(S)$ a \tilde{g}_{α} ortogonální doplněk do $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) coby minimum J_{α} v závislosti na daném $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

1. Jako první ukažme, že pro $\alpha_n \rightarrow \infty$ je $\|g_{\alpha_n}\| < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uvažujme sporem, že z posloupnosti (g_{α_n}) vybereme posloupnost $(g_{\alpha_{n_k}})$ takovou, že $\|g_{\alpha_{n_k}}\| \rightarrow \infty$. Potom ale díky koercivitě a pozorování 5.3 vidíme, že $\hat{J} \geq J_{\alpha}(g_{\alpha_{n_k}}) \rightarrow \infty$. Čímž jsme narazili na spor.

2. Nyní ukažme, že pro $\alpha_n \rightarrow \infty$ jde $\tilde{g}_{\alpha_n} \rightarrow 0$.

Opět uvažujme sporem, že pro nějakou vybranou posloupnost $(\tilde{g}_{\alpha_{n_k}})$ najdeme $\epsilon > 0$ takové, že $\|\tilde{g}_{\alpha_{n_k}}\| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. To by však díky vlastnostem Steklov-Poincarého operátoru z věty 3.4 znamenalo, že

$$\hat{J} \geq J_{\alpha}(g_{\alpha_{n_k}}) \geq \frac{\alpha_{n_k}}{2} \langle S\tilde{g}_{\alpha_{n_k}}, \tilde{g}_{\alpha_{n_k}} \rangle \geq \frac{\alpha_{n_k}}{2} \tilde{\alpha} \epsilon^2 \rightarrow \infty.$$

Což je hledaný spor.

3. Nakonec ukažme, že pro $\alpha_n \rightarrow \infty$ jde $c_{\alpha_n} \rightarrow \bar{c}$. Je zřejmé, že posloupnost (c_{α_n}) musí být omezená, jelikož jsme ukázali že $\tilde{g}_{\alpha_n} \rightarrow 0$ pro $\alpha_n \rightarrow \infty$.

Uvažujme, že $c_{\alpha_{n_k}} \rightarrow c \in \mathbb{R}$, potom

$$g_{\alpha_{n_k}} = \underbrace{\tilde{g}_{\alpha_{n_k}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{c_{\alpha_{n_k}}}_{\rightarrow c} \rightarrow c.$$

Avšak jelikož

$$J_{\alpha}(g_{\alpha_{n_k}}) \leq J_{\alpha}(\bar{c}) \leq J_{\alpha}(c)$$

je díky spojitosti J_α

$$J_\alpha(c) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_\alpha(g_{\alpha_{n_k}}) \leq J_\alpha(\bar{c}) \leq J_\alpha(c) \Rightarrow J_\alpha(c) = J_\alpha(\bar{c}).$$

Avšak jelikož existuje právě jedno takové námi uvažované číslo \bar{c} (viz. např. [2] - Fourierovy řady), je $c = \bar{c}$.

Z bodů 1,2,3 tak dostáváme, že

$$\alpha_n \rightarrow \infty \Rightarrow g_{\alpha_n} = \underbrace{\tilde{g}_{\alpha_n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{c_{\alpha_n}}_{\rightarrow \bar{c}} \rightarrow \bar{c} \text{ v } H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

■

6 Diskretizace a numerická realizace

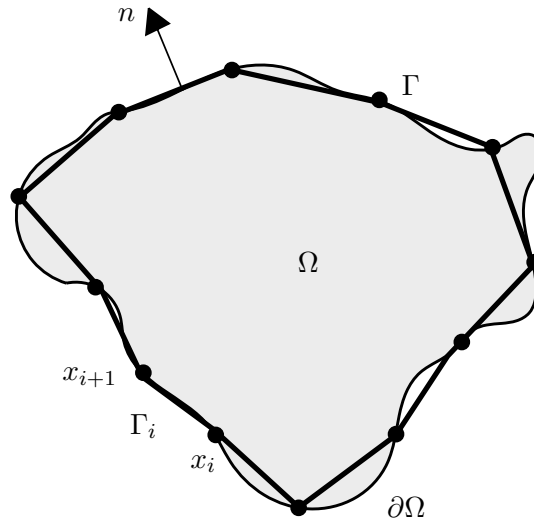
Podívejme se nyní na diskretizaci variační rovnice (18).

Aproximujme hranici oblasti Ω polygonem Γ o N ekvidistantních hranách. Necht' každá hrana tohoto polygonu pak odpovídá úsečku Γ_i , tedy

$$\partial\Omega \approx \Gamma := \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i.$$

Označme si krajní body úsečky Γ_i jako x_i a x_{i+1} a dále diametr jednotlivých úseček jako h , viz. obr. 5. Obecně tak máme množinu bodů

$$\{x_i\}_{i=1}^N.$$

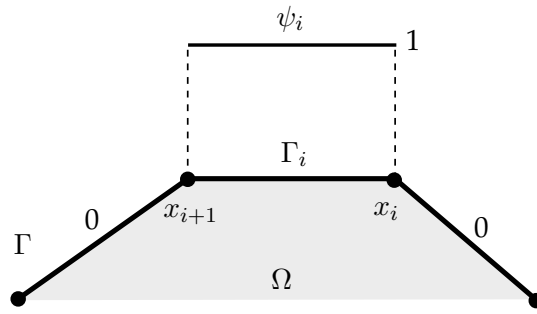


Obrázek 5: Aproximace hranice oblasti Ω

Naším cílem nyní bude konečně-dimenzionální aproximace prostorů $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ a $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Definujme si následující báze funkce:

- Nespojité po částech konstantní funkce (viz. obr. 6)

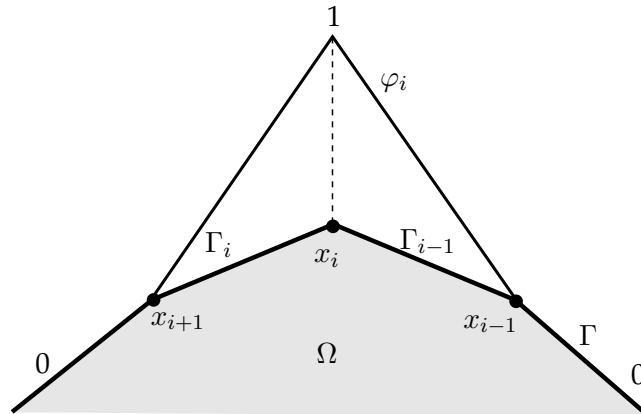
$$\psi_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \Gamma_i, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Obrázek 6: Bázová funkce $\psi_i(x)$

- Spojité po částech afinní funkce (viz. obr. 7), kde

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x = x_j, \\ 0 & \text{pro } x = x_{j-1}, x = x_{j+1}, \\ 0 & \text{pro } x \notin \{\Gamma_{j-1}, \Gamma_j\} \end{cases}$$

a $\varphi(x)$ je lineární na každém dílku Γ_j .

Obrázek 7: Bázová funkce $\varphi_i(x)$

Příslušné prostory nyní nahradíme jejich konečně-dimenzionálními aproximacemi, tvořenými jako lineární obaly bázových funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jako

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx H_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \text{Lin} \{ \varphi_i \}_{i=1}^N \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx H_h^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) := \text{Lin} \{ \psi_i \}_{i=1}^N \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$$H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \approx H_h^{\frac{3}{2}}(\Gamma) := \text{Lin} \{ \varphi_i \}_{i=1}^N \subset H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \text{ a}$$

$$H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \approx H_h^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) := \text{Lin} \{ \psi_i \}_{i=1}^N \subset H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma).$$

Variační rovnice (18) tak přejde to diskrétního tvaru

$$\left\langle \left[\alpha S^h - (V^h)^{-1} \left(V_1^h S^h - K_1^h \right) \right] g^h, v^h \right\rangle = \left\langle (V^h)^{-1} N_0^h \bar{u}^h, v^h \right\rangle, \quad \forall v^h \in H_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (19)$$

kde

$$g^h(x) = \sum_{j=1}^N g_j \varphi_j(x) \in H_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (20)$$

představuje aproximaci hledané funkce $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Označme si \bar{g} vektor koeficientů g_j lineární kombinace (20).

Variační rovnost (19) tak můžeme přepsat jako soustavu lineárních rovnic

$$T_\alpha^h \bar{g} = b, \quad (21)$$

kde

$$T_\alpha^h := \alpha S^h - (V^h)^{-1} \left(V_1^h S^h - K_1^h \right) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

a

$$b := (V^h)^{-1} \left(N_0^h \bar{u}^h \right) \in \mathbb{R}^{N \times 1}.$$

Veškeré operátory s horním indexem h pak představují příslušné hraniční operátory, známé z kapitol 4.1 a 4.2, avšak v diskrétní podobě. Pojdme se nyní na tyto operátory podívat podrobněji.

Začneme diskretizací Steklov-Poincarého operátoru (viz. např. [10]). Diskretizací dostáváme předpis

$$S^h := \left[\left(\frac{1}{2} (M^h)^T + (K^h)^T \right) (V^h)^{-1} \left(\frac{1}{2} (M^h)^T + K^h \right) + D^h \right],$$

kde máme:

- Matici jednoduché vrstvy

$$[V^h]_{i,j} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \ln \|x - y\| \, ds_y ds_x.$$

- Matici dvojvrstvy

$$[K^h]_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j} \varphi_j(y) \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{\|x - y\|^2} \, ds_y ds_x.$$

- Matice hmoty

$$[M^h]_{i,j} = \int_{\Gamma_i} \varphi_j \, ds.$$

- Hypersingulární matice

$$D_h = T_h^T \cdot V_h \cdot T_h, \text{ kde } [T]_{i,j} = \frac{d\varphi_j}{dt}.$$

- Vektor

$$[N_0^h \bar{u}]_{j,1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \int_{\Omega} \ln \|x - y\| \bar{u}(y) \, dy ds_y.$$

Lze ukázat, že takto sestavená matice S^h je pak symetrická a pozitivně semi-definitní. Detaily ohledně diskretizace jednotlivých hraničních operátorů pro Poissonovu rovnici jsou již podrobně rozebrány např. v [7],[10] a nebudeme je zde tedy hlouběji rozebírat. Všimněme si dále singularity ve vyjádření matic V^h a K^h . Tento problém je pak v implementační části této práce řešen pomocí Gaussovy kvadratury singulárních funkcí, popsané např. v [7].

My se však podrobně podíváme na diskretizaci operátorů pro bi-Laplaceovu rovnici. Zavedme si pro jednotlivé dílky hranice Γ_i s ekvidistanční délkou h následující parametrizace:

$$\begin{aligned} S_i(s) &:= x_i + (x_{i+1} - x_i)s, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle, \\ S_j(t) &:= x_j + (x_{j+1} - x_j)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ S_{j-1}(p) &:= x_{j-1} + (x_j - x_{j-1})p, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

a tedy

$$\|S'_i\| = \|S'_j\| = \|S'_{j-1}\| = h.$$

Nyní se konečně podíváme na matice V_1^h a K_1^h .

- Matice jednoduché vrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici

$$[V_1^h]_{i,j} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \|x - y\|^2 (\ln \|x - y\| - 1) \, ds_y ds_x.$$

Uvažujme zmíněnou parametrizaci dílků Γ_i a Γ_j a funkci

$$\beta(s, t) := x_i - x_j + (x_{i+1} - x_i)s - (x_{j+1} - x_j)t.$$

Můžeme tak psát, že

$$[V_1^h]_{i,j} = -\frac{h^2}{8\pi} \int_0^1 \int_0^1 \|\beta(s, t)\|^2 (\ln \|\beta(s, t)\| - 1) \, dt ds.$$

Opět vidíme, že by zde mohl nastat problém se singularitou, kdyby $\|\beta(s, t)\| = 0$. Podívejme se však na celé jádro integrálu pozorně a všimněme si, že

$$\lim_{\|\beta(s, t)\| \rightarrow 0} \|\beta(s, t)\|^2 \ln \|\beta(s, t)\| = 0.$$

Integrál v předpisu pro matici jednoduché vrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici tak obsahuje odstranitelnou singularitu.

- Matice dvojrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici

Jako první si vyjádříme normálovou derivaci fundamentálního řešení bi-Laplaceovy rovnice, tedy

$$\frac{d}{dn_y} V^*(x, y) = \langle \nabla V^*(x, y), n(y) \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle x - y, n(y) \rangle (\ln \|x - y\|^2 - 1).$$

Odtud pak

$$[K_1^h]_{i,j} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j \cup S_{j-1}} \varphi_j(y) \langle x - y, n(y) \rangle (\ln \|x - y\|^2 - 1) ds_y ds_x,$$

kde $n(y)$ značí jednotkový vektor vnější normály.

Zavedme si obdobně jako u matice jednoduché vrstvy funkce

$$\begin{aligned} \beta(s, t) &:= x_i - x_j + (x_{i+1} - x_i)s - (x_{j+1} - x_j)t \\ \delta(s, t) &:= x_i - x_{j-1} + (x_{i+1} - x_i)s - (x_j - x_{j-1})t. \end{aligned}$$

a rozložme si matici $[K_1^h]_{i,j}$ na součet

$$[K_1^h]_{i,j} = [K_1^{h,1}]_{i,j} + [K_1^{h,2}]_{i,j},$$

kde

$$[K_1^{h,1}]_{i,j} = \frac{h^2}{8\pi} \int_0^1 \int_0^1 \langle \beta(s, t), n_j \rangle (\ln \|\beta(s, t)\|^2 - 1)(1 - t) dt ds$$

a

$$[K_1^{h,2}]_{i,j} = \frac{h^2}{8\pi} \int_0^1 \int_0^1 \langle \delta(s, t), n_{j-1} \rangle (\ln \|\delta(s, t)\|^2 - 1) p \, dp \, ds.$$

Symbolem n_j popř. n_{j-1} rozumíme jednotkový vektor vnější normály k dílku Γ_j popř. Γ_{j-1} .

Navíc stejně jako v případě matice jednoduché vrstvy pro bi-Laplaceovu rovnici vidíme, že i zde se v předpisech pro $[K_1^{h,1}]$ a $[K_1^{h,2}]$ nachází odstranitelná singularita.

Nyní již tedy máme veškeré operátory vyskytující se v naší variační rovnici (18) diskretizované a můžeme se tak přesunout k numerickým experimentům.

7 Numerické experimenty

V této kapitole se podíváme na vybrané numerické experimenty, ve kterých budeme testovat pozorování a tvrzení z kapitoly 5.3.

Příklad 7.1

Mějme danou oblast $\Omega := (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^2$, funkci $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4$ splňující $\Delta\bar{u} = 0$ v Ω a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Naším cílem je najít funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pro kterou funkcionál

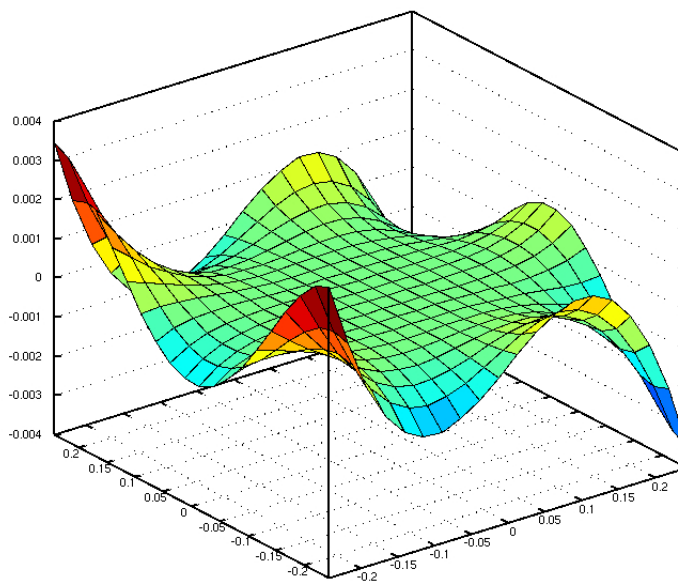
$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta u_g(x) &= 0 & \text{pro } x \in \Omega, \\ u_g(x) &= g(x) & \text{pro } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{22}$$

nabývá svého minima na $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Funkci \bar{u} můžeme vidět na obrázku 8.



Obrázek 8: Funkce $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^5 - 10x_1^3x_2^2 + 5x_1x_2^4$.

Jako první si na základě pozorování 5.3 určíme hodnotu \bar{c} pro danou funkci \bar{u} a příslušný horní odhad \hat{J} .

Dostáváme, že

$$\bar{c} = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \bar{u} = \frac{1}{0.25} \int_{-1/4}^{1/4} \int_{-1/4}^{1/4} x_1^5 - 10x_1^3 x_2^2 + 5x_1 x_2^4 \, dx_1 dx_2 = 0.$$

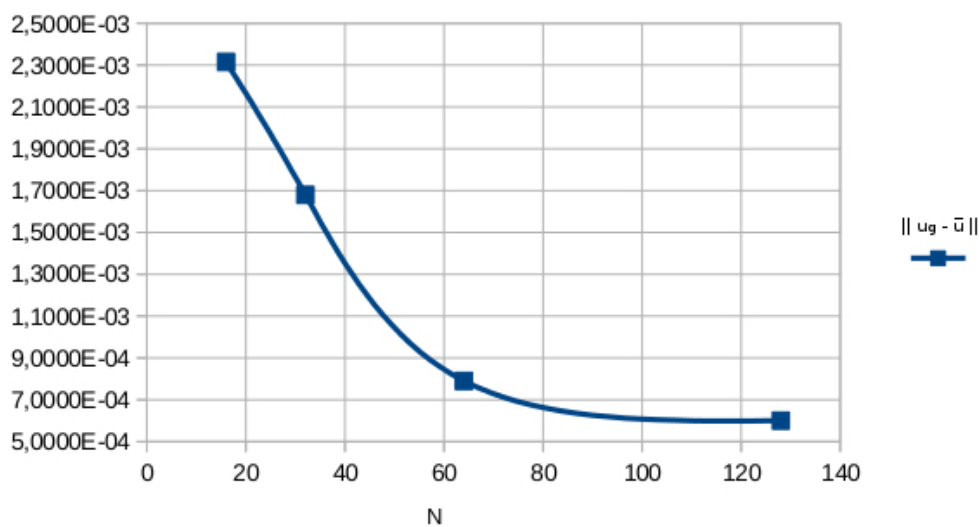
a tedy

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_\Omega (0 - \bar{u})^2 \approx 6.6973E - 08.$$

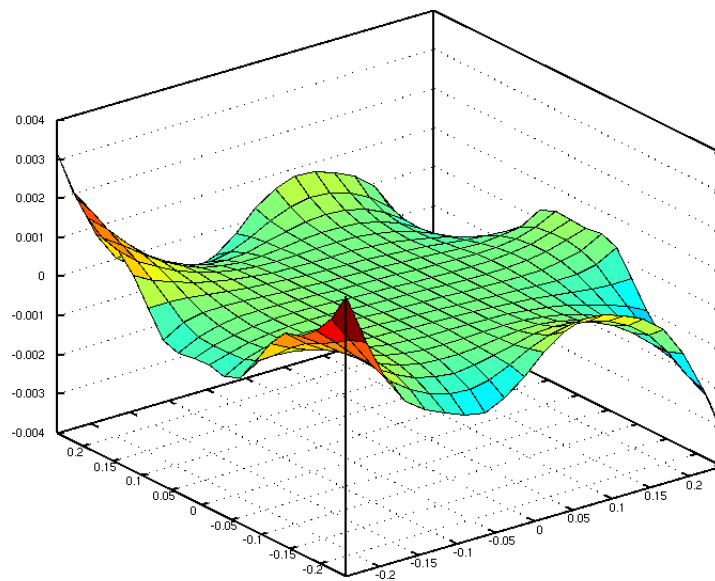
V tabulce 1 a na obrázku 9 můžeme vidět výsledky pro volbu $\alpha = 0$, kde N značí počet uzlů na hranici. Funkce u_g a \bar{u} byly uvnitř oblasti vyčísleny pro 100 vnitřních uzlů. Se zjemňující se sítí, se skutečně dle očekávání z pozorování 5.2 $J_\alpha(g) \rightarrow 0$ a $u \rightarrow \bar{u}$ v $L^2(\Omega)$, jak můžeme dále vidět i na obrázku 10.

N	$J_\alpha(g)$	$\ u_g - \bar{u}\ _{L^2(\Omega)}$
16	5.2944E-09	2.3153E-03
32	2.7884E-09	1.6803E-03
64	6.1697E-10	7.9037E-04
128	3.5909E-10	6.0045E-04

Tabulka 1: Výsledky pro příklad 5.1 při volbě $\alpha = 0$.



Obrázek 9: Hodnoty $\|u_g - \bar{u}\|$ pro $\alpha = 0$.



Obrázek 10: Aproximace funkce u_g pro $\alpha = 0$ a $N = 32$.

Dále si otestujeme pozorování 5.2 pro fixní síť a $\alpha \rightarrow 0$.

N	M	α	$\ u_g - \bar{u}\ _{L^2(\Omega)}$
64	400	1E-03	4.8230E-03
64	400	1E-06	1.3195E-03
64	400	1E-09	1.3189E-03
64	400	1E-12	1.3186E-03

Tabulka 2: Výsledky numerických experimentů pozorování 5.2.

Z tabulky 2, kde N značí počet uzlů na hranici a M počet uzlů uvnitř oblasti, skutečně vidíme, že pro $\alpha \rightarrow 0$ jde $u_g \rightarrow \bar{u}$.

Jako poslední otestujeme tvrzení 5.2.

N	M	α	$\ g - \bar{c}\ _{L^2(\partial\Omega)}$
64	400	0.1	7.2003E-04
64	400	1	7.6781E-05
64	400	5	1.5438E-05
64	400	10	7.7513E-06
64	400	50	1.5492E-06
64	400	100	7.7571E-07

Tabulka 3: Výsledky numerických experimentů tvrzení 5.2.

V tabulce 3 můžeme vidět, že nám skutečně $g \rightarrow \bar{c}$ pro $\alpha \rightarrow \infty$.

■

Příklad 7.2

Mějme danou oblast $\Omega := (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^2$, funkci $\bar{u}(x_1, x_2) = \sin(10x_1) \cos(10x_2)$ (v tomto případě $\Delta \bar{u} \neq 0$ v Ω) a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Naším cílem je najít funkci $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pro kterou funkcionál

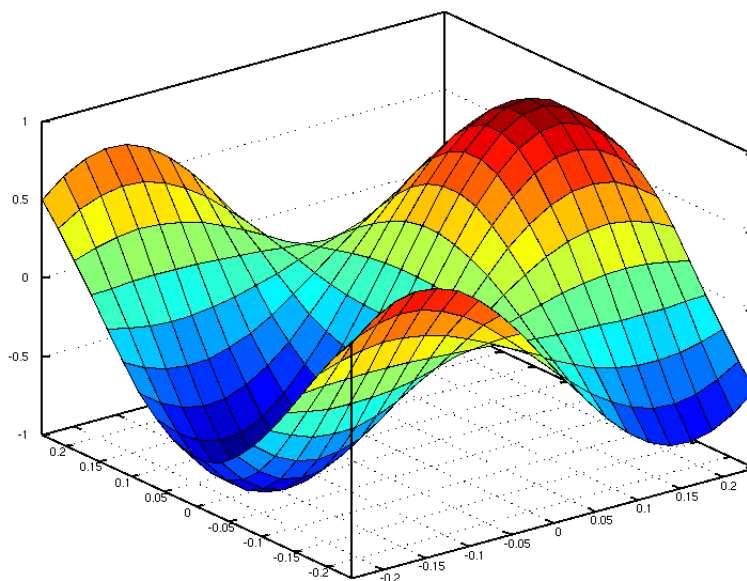
$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_g(x) - \bar{u}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \langle Sg, g \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta u_g(x) &= 0 & \text{pro } x \in \Omega, \\ u_g(x) &= g(x) & \text{pro } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

nabývá svého minima.

Funkci \bar{u} můžeme vidět na obrázku 11.



Obrázek 11: Funkce $\bar{u}(x_1, x_2) = \sin(10x_1) \cos(10x_2)$

V tomto případě se nám již nepodaří testovat pozorování 5.2 jelikož $\Delta \bar{u} \neq 0$ v Ω . Obdobně jako v příkladu 7.1 si však otestujeme tvrzení 5.2.

Jako první opět určíme hodnotu \bar{c} a horní odhad \hat{J} pro danou funkci \bar{u} .

$$\bar{c} = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \bar{u} = \frac{1}{0.25} \int_{-1/4}^{1/4} \int_{-1/4}^{1/4} \sin(10x_1) \cos(10x_2) \, dx_1 dx_2 = 0$$

a tedy

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_\Omega (0 - \bar{u})^2 \approx 3.0101E - 02.$$

V tabulce 4 můžeme stejně jako v příkladě 7.1 vidět, že $g \rightarrow \bar{c}$ a $J_\alpha(g) \rightarrow \hat{J}$ pro $\alpha \rightarrow \infty$.

N	M	α	$\ g - \bar{c}\ _{L^2(\partial\Omega)}$	$J_\alpha(g)$
64	400	0.1	3.5664E-01	2.0471E-02
64	400	1	4.0570E-02	2.1106E-02
64	400	5	8.2384E-03	2.1169E-02
64	400	10	4.0330E-03	2.1178E-02
64	400	50	8.0638E-04	2.1184E-02
64	400	100	4.0327E-04	2.1185e-02

Tabulka 4: Výsledky numerických experimentů tvrzení 5.2.

■

8 Závěr

V této práci jsme se zabývali optimálním řízením pro Dirichletovu okrajovou úlohu bez omezení. Danou problematiku jsme si předvedli jak v 1D tak ve 2D. V obou případech úloha spočívala v minimalizaci cenového funkcionálu, kde minimum představovalo hledanou okrajovou podmínku pro uvažovanou Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici. Celou problematiku jsme si na začátku ilustrovali na úloze stacionárního rozložení tepla.

V 1D případě jsme si ukázali, že tato minimalizace je ekvivalentní s hledáním minima funkce dvou proměnných, kde tyto proměnné představují koeficienty lineární funkce, tvořící řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici v 1D. Díky tomuto faktu jsme do samotné minimalizace viděli skutečně do hloubky a mohli tak celou úlohu optimálního řízení lépe pochopit. Problematiku 1D jsme potom demonstrovali na sérii numerických experimentů, jejichž výsledky odpovídaly spočtenému analytickému řešení.

Ve 2D pak byla celá situace komplikovanější. Díky znalostem hraničních integrálních operátorů pro Poissonovu a bi-Laplaceovu rovnici, znalosti příslušných fundamentálních řešení a také problematice adjungovaných operátorů jsme minimalizaci převedli na variační rovnici na hranici. Tímto postupem jsme si pak vystačili pouze s diskretizací hranice dané oblasti. Před samotnou minimalizací jsme si však podrobně dokázali, že dané minimum skutečně existuje. Následně jsme úlohu diskretizovali a převedli na soustavu lineárních rovnic.

Na závěr jsme provedli sérii numerických experimentů ve 2D, pro různě volené funkce \bar{u} , a to konkrétně pro funkce splňující $\Delta \bar{u} = 0$ a $\Delta \bar{u} \neq 0$. Pro obě volby jsme sledovali odchylku řešení od očekávané hodnoty \bar{c} pro $\alpha \rightarrow \infty$ a navíc, v případě kdy $\Delta \bar{u} = 0$ jsme sledovali, jestli $u_g \rightarrow \bar{u}$ jak pro zjemňující se diskretizaci hranice a volbu $\alpha = 0$ tak pro fixní síť a $\alpha \rightarrow 0$.

Celá práce tak popsala optimální řízení v 1D a 2D pro Laplaceovou rovnici bez omezení. Do budoucna by již bylo snadné rozšířit problematiku také do 3D ale převážně se jako budoucí práce nabízí řešit optimalizaci s omezením, díky čemuž by se bylo třeba zabývat variačními nerovnicemi na hranici. Rovněž by se pak nabízelo tuto problematiku aplikovat i na jiné typy úloh, např. pro Navier-Stokesovu úlohu, kde má pak optimální řízení pro Dirichletovu úlohu velké uplatnění v praxi.

9 Reference

- [1] J. Bouchala: *Úvod do Boundary Elements Method*
Slidy vytvořené pro zimní školu v rámci konference SNA' 07, 2007
- [2] J. Bouchala: *Úvod do funkcionální analýzy*
Skript vytvořené v rámci projektu MI21, 2012
- [3] J. Bouchala: *Variační metody*
Skript vytvořené v rámci projektu MI21, 2012
- [4] M. Costabel & M. Dauge: *Invertibility of the biharmonic single layer potential operator*
Advances in Computational Mathematics 19: 339–354, 2003
- [5] Y. Jeon & W. McLean: *A new boundary element method for the biharmonic equation with Dirichlet boundary*
1995
- [6] M. Kučera: *Variační nerovnice, úvod do teorie a užití na okrajové úlohy pro PDR*
Západočeská univerzita v Plzni, 2007
- [7] D. Lukáš: *Efficient Numerics for Boundary Integral Equations*
Přednáška pro Seminář Numerické Analýzy, VSB-TU Ostrava, 2013
- [8] T. X. Phan: *Boundary Element Methods for Boundary Control Problems*
Verlag der Technischen Universität Graz, 2011
- [9] M. Sadowská: *Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic*
Diplomová práce, VŠB-TUO, 2005
- [10] M. Sadowská: *Scalable Total BETI for 2D and 3D contact Problems*
Dizertační práce, VŠB-TUO, 2008
- [11] O. Steinbach: *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*
Springer, 2008